ЗАДАЧА О ПРОНИКНОВЕНИИ В ТВЕРДОЕ ТЕЛО ПОТОКА ЛУЧИСТОЙ ЭНЕРГИИ (ВОЛНА МАРШАКА)

В.А. Кот
Институт тепло- и массообмена имени А.В. Лыкова НАН Беларуси,
ул. П. Бровки 15, Минск 220072, Беларусь, valery.kot@hmti.ac.by

Предложен новый подход к приближенному решению уравнения лучистой теплопроводности, когда внутренняя энергия e и непрозрачность по Росселанду K имеют степенные зависимости от плотности и температуры: $e = fT^{\beta}/\rho^{\mu}$, $K^{-1} = qT^{\alpha}/\rho^{\lambda}$, где f и q – константы, α, β, μ и λ – показатели степени. Метод основан на преобразовании исходного уравнения лучистой теплопроводности $\partial T^{\beta}/\partial t = \chi \partial T^{4+\alpha}/\partial x^2$, где $\chi = 16/(12+3\alpha)q\sigma/\left(f\rho^{2-\mu+\lambda}\right)$ – коэффициент, характеризующий тепловой поток. Данное уравнение преобразуется в дифференциальное уравнение $\mathrm{d}^2\theta^{n+4}/\mathrm{d}\eta^2 + \eta\,\mathrm{d}\theta/\mathrm{d}\eta = 0$, где $T^{\beta} = \theta$. Принимается, что температура поверхности тела поддерживается при постоянном значении. Полученные аналитические решения нелинейной задачи лучистой теплопроводности показали высокую точность найденных аппроксимаций: как для температурного фронта, так и для положения фронта тепловой волны. Ошибка расчета положения фронта волны Маршака в твердом теле для первого приближения составляет тысячные и десятитысячные доли процента в зависимости от показателя степени *n*.

Ключевые слова: лучистая теплопроводность; излучение лазера; волна Маршака.

PROBLEM ON THE PENETRATION OF A RADIATIVE ENERGY FLUX INTO A SOLID BODY (MARSHAK WAVE)

V.A. Kot
A.V. Luikov Institute of Heat and Mass Transfer, National Academy of Sciences of Belarus,
15 P. Brovka Str., 220072 Minsk, Belarus, valery.kot@hmti.ac.by

A new approach to the approximate solution of the equation for the radiative thermal conductivity of a body in the case where its internal energy e and the Rosseland non-transparency K of it are defined by the power dependences for the density and temperature of the body: $e = fT^{\beta}/\rho^{\mu}$, $K^{-1} = qT^{\alpha}/\rho^{\lambda}$, where f and q are constants, and α, β, μ, and λ are exponents, is propped. In this approach, it is assumed that the temperature of the surface of the body remains unchanged. The method developed is based on the transformation of the initial equation for the radiative thermal conductivity of a body $\partial T^{\beta}/\partial t = \chi \partial T^{4+\alpha}/\partial x^2$, where $\chi = 16/(12+3\alpha)q\sigma/\left(f\rho^{2-\mu+\lambda}\right)$ is the coefficient characterizing the heat flow in it, into the ordinary nonlinear differential equation with self-similar variables $\mathrm{d}^2\theta^{n+4}/\mathrm{d}\eta^2 + \eta\,\mathrm{d}\theta/\mathrm{d}\eta = 0$, where $T^{\beta} = \theta$. A new temperature profile of a body, involving coefficients and parameters, satisfying the initial boundary conditions, the integral relation for the first momentum, and the boundary relations following from the differential equation fulfilled at the front of the heat wave in the body, is proposed. For the first approximation, one differential equation is used. In this case, we have the temperature profile $\theta = (1+a\zeta)(1-\zeta)^{1/(n+3)}$ with one unknown coefficient *a* and the parameter $\zeta = \eta/\eta_0$. The parameter η_0 is determined from the algebraic equation following from the integral relation for the first momentum. The analytical solutions obtained for solving the nonlinear problem on the radiative thermal conductivity of a body provide the high accuracy of the approximations obtained with them for the temperature profile of the body and the position of the front of the heat wave (Marshak wave) in it. The temperature profiles obtained on the basis of the new approach (the first approximation) and on the basis of the numerical solution are completely identical. The error in calculating the position of the Marshak wave front in a body in the first approximation comprises thousandths and ten thousandths of a percent depending on the exponent *n*.

Keywords: radiative thermal conductivity; laser radiation; Marshak wave.

Введение

Тепловые волны, вызванные излучением, встречаются в различных астрофизических и лабораторных ситуациях и с разной степенью точности могут быть описаны в диффузионном приближении, когда тепловой поток определяется для любой заданной точки в виде локального градиента плотности лучистой энергии [1]. Несмотря на то, что современные вычислительные методы дают в ряде случаев высокоточные решения, по-прежнему сохраняет актуальность аналитический подход, дающий понимание природы рассматриваемой проблематики, а также позволяющий получать быструю оценку в экспериментальных исследованиях [2, 3]. Первый шаг в данном направлении был сделан Баренблаттом [4], исследовавшим автомодельные решения. Одно из полученных им решений дает линейно возрастающую во времени глубину проникновения тепловой волны; второе отвечает сохранению полной энергии, содержащейся в волне и остающейся постоянной после ее начального выброса в точке пространства. Последний случай подробно рассмотрен в работе Зельдовича и Райзера [5]. Два других точных решения представлены Хаммером и Розеном [5], при этом фактически повторены решения Баренблатта с заменой точки на поверхность. В работе Маршака [6] исследованы варианты получения точных решений данной задачи. Отметим также работу Паттла [7]. Приближенные аналитические решения представлены Хислетом и Алксне [8], Лонгом и Тахиром [9], Гарнье (с соавт.) [10] и в последнее время – Крифом [11].

Наше рассмотрение мы ограничим сверхзвуковой волной высокоэнергетического излучения, имеющей четко выраженный фронт, при этом свойства среды зададим степенными функциями от температуры. В приближении лучистой теплопроводности (отсутствие движения, постоянство плотности среды) уравнение лучистого переноса принимает вид [5]:

$$\rho\frac{\partial}{\partial t}e=-\frac{\partial}{\partial x}F,\quad F=-\frac{4}{3K\rho}\frac{\partial}{\partial}\sigma T^4,\qquad(1)$$

где e – внутренняя энергия на единицу массы, ρ – плотность, T – температура, F – тепловой поток, σ – постоянная Стефана–Больцмана, K – средняя непрозрачность по Росселанду, t – время, x – пространственная координата. Предполагаем, что e и K имеют степенную зависимость от плотности и температуры: $e=fT^{\beta}/\rho^{\mu}$, $K^{-1}=qT^{\alpha}/\rho^{\lambda}$, где f и q – константы, α, β, μ и λ – показатели степени.

Математическая модель

Рассмотрим случай, когда полупространство $x>0$ заполнено средой с плотностью ρ. Пусть, начиная с момента времени $t=0$, «холодная» среда ($x>0$) вступает в контакт со средой при температуре T_0. Если пренебречь перемещением, то уравнение лучистого переноса примет вид:

$$\frac{\partial e}{\partial t}=\frac{4}{3}\frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{K\rho}\frac{\partial\sigma T^4}{\partial x}.\qquad(2)$$

Подставив в него (1) с учетом $\rho=\mathrm{const}$, приходим к уравнению:

$$\frac{\partial T^{\beta}}{\partial t}=\chi\frac{\partial T^{4+\alpha}}{\partial x^2},\qquad(3)$$

где $\chi=\dfrac{16}{12+3\alpha}\dfrac{q\sigma}{f\rho^{2-\mu+\lambda}}$ – коэффициент, характеризующий тепловой поток [5]. Введя степень $m=(4+\alpha)/\beta$, $T^{\beta}=\theta$, $m=n+4$, уравнение (3) запишется как

$$\frac{\partial\theta}{\partial t}=\chi\frac{\partial^2\theta^m}{\partial x^2}\quad\to\quad\frac{\partial\theta}{\partial t}=\chi\frac{\partial^2\theta^{n+4}}{\partial x^2},\qquad(4)$$

что отвечает по форме уравнению лучистой теплопроводности [9]. Исходя из начальных и граничных условий, имеем:

$$T(x,0)=0\quad\to\quad\theta(x,0)=0,\qquad(5)$$

$$T(0,t)=T_0\quad\to\quad\theta(0,t)=\theta_0=T^{1/\beta}.\qquad(6)$$

Для безразмерных переменных $\theta = \theta / \theta_0$, $\eta = x / \sqrt{2\chi\theta^{n+3}t}$ вместо (4)–(6) имеем [9]

$$\frac{d^2\theta^{n+4}}{d\eta^2} + \eta\frac{d\theta}{d\eta} = 0, \quad \eta > 0, \qquad (7)$$

$$\theta(0) = 1, \quad \theta(\infty) = 0. \qquad (8)$$

Приближенное решение задачи

Умножим уравнение (7) на η и проинтегрируем по области $\eta = [0, \eta_0]$, где η_0 – фронт радиационной (тепловой) волны при $\theta(0 \le \eta < \eta_0) \ne 0$ и $\theta(\eta > \eta_0) = 0$. В итоге (после соответствующих преобразований и интегрирования по частям) имеем интегральное соотношение:

$$\int_0^1 \theta(\zeta)\,\zeta\,d\zeta = \frac{1}{2\eta_o^2}, \qquad \zeta = \frac{\eta}{\eta_0}. \qquad (9)$$

Функцию θ опишем в виде полинома:

$$\theta = (1 + a\,\zeta)\,(1-\zeta)^{\frac{1}{n+3}}, \qquad (10)$$

который содержит лишь один неизвестный коэффициент *a*. Отметим, что данная форма температурного профиля в тепловой волне (волне Маршака) представляется впервые. Для определения коэффициента *a* введем в рассмотрение вспомогательную функцию $V = \theta^{n+3}$, для которой из (7) получаем уравнение:

$$\frac{\eta}{n+4}\frac{dV}{d\eta} + \frac{1}{n+3}\left(\frac{dV}{d\eta}\right)^2 + V\frac{d^2V}{d\eta^2}. \qquad (11)$$

Применив для (11) условие $V(\eta_0) = 0$, приходим к дифференциальному соотношению:

$$\frac{dV(\eta_0)}{d\eta} = -\frac{n+3}{n+4}\eta_0. \qquad (12)$$

Тогда на основе (9) получаем определяющее алгебраическое уравнение:

$$\left(\frac{n+3}{n+4}\eta_0\right)^{\frac{1}{n+3}} + \frac{3n+10}{2(n+3)}\left[1 - \frac{(n+4)(2n+7)}{2(n+3)^2\eta_0^2}\right] = 1.$$

Данное уравнение позволяет найти, в зависимости от показателя степени *n*, параметр η_0, который позволяет определить, в конечном счете, положение фронта волны Маршака в твердом теле:

$$x_* = \eta_0\sqrt{2\chi\theta^{n+3}t}\,. \qquad (13)$$

Расчет согласно определяющему уравнению (13) при $n = 0$ и 3 дает практически точные значения параметра η_0, задающего положение во времени фронта тепловой волны. В данном случае имеем $\eta_0 = 1.231188$ и 1.1199365 с относительными ошибками 0.0012% и 0.00014% по сравнению с точными значениями $\eta_0 = 1.231173$ и $\eta_0 = 1.119935$ [9]. Таким образом, полученные решения уравнения лучистой теплопроводности с отмеченными выше приближениями при постоянстве температуры на поверхности тела можно считать практически точными. Из (9) и (10) получаем:

$$\theta = \left(1 - \frac{\eta}{\eta_0}\right)^{\frac{1}{n+3}}\left[1 + \left(\left(\frac{n+3}{n+4}\eta_0^2\right)^{\frac{1}{n+3}} - 1\right)\frac{\eta}{\eta_0}\right].$$

Результаты расчета на основе приближенного решения и численного решения уравнения (11) представлены на рис. 1, 2. Графики, отвечающие аналитическому и численному решениям, практически полностью сливаются.

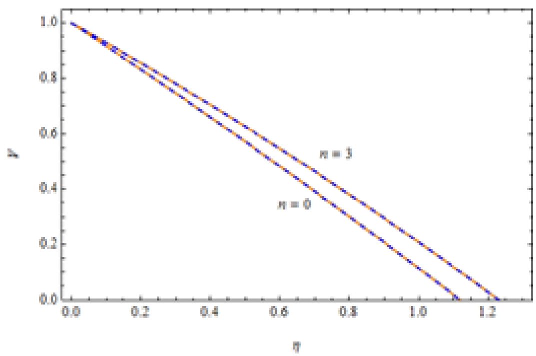

Рис. 1. Графики функции $V(\eta)$ на основе численного (сплошная линия) и аналитического (пунктирная линия) решений

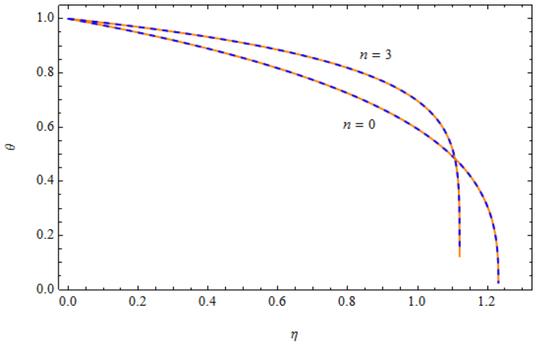

Рис. 2. Графики функции $\theta(\eta)$ на основе численного (сплошная линия) и аналитического (пунктирная линия) решений

Заключение

На основе анализа работ, посвященных решению задач о проникновении в твердые тела сверхмощных лазерных излучений и связанных с преобразованием энергии лазера в рентгеновское излучение для непрямого возбуждения ICF, продемонстрирована актуальность проблемы получении приближенных высокоточных решений подобного круга задач. Одной из них является математическое моделирование волны Маршака. На основе преобразования модели лучистой теплопроводности получено нелинейное дифференциальное уравнение с подвижным фронтом. Для его приближенного решения потребовалось ввести интегральное соотношение для первого момента, а также дополнительное граничное соотношение, вытекающее из условия выполнения основного дифференциального уравнения на переднем фронте тепловой волны. В итоге задача свелась к решению определяющего обыкновенного алгебраического уравнения относительно параметра η_0, задающего, в конечном счете, положение фронта тепловой волны и ее температурный профиль. Ошибка аналитического расчета положения фронта волны Маршака для первого приближения составляет тысячные и десятитысячные доли процента в зависимости от показателя степени *n*.

Библиографические ссылки

1. Hammer J.H., Rosen M.D. A Consistent Approach to Sokving the Radiation Diffusion Equationю *Physics of Plasmas* 2003; 10(5): 1829-1845.
2. Heaslet M.A., Alksne A. Diffusion from a Fixed Surface with a Concentration-dependent Coefficient. J. Soc. *Industrial and Applied Mathematics* 1961; 9(4): 584-596.
3. Smith C.C. Solutions of the radiation diffusion equation. *High Energy Density Physics* 2010; 6: 48-56.
4. Баренблатт Г.И. О некоторых неустановившихся движениях жидкости и газа в пористой среде. *Прикладная математика и механика* 1952; 16 (1): 67-78.
5. Зельдович Я.Б., Райзер Ю.П. Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений. М.: Физматлит; 2008, 656 с.
6. Marshak R.E. Effect of Radiation on Shock Wave Behavior. *Physics of Fluids* 1958; 1(1): 24-29.
7. Pattle R.E. Diffusion from an Instantaneous Point Source with a a Concentration-dependent Coefficient *The Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics* 1959; 12: 407-409.
8. Heaslet M.A., Alksne A. Diffusion from a Fixed Surface with a Concentration-dependent Coefficient. *Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics* 1961; 9(4): 584-596.
9. Long K.F., Tahir N.A. Plasma induced energy deposition and radiation transport effects in ion beam heated plane metal targets and analytic solutions of the non-linear radiation conduction equation. *Laser and Particle Beams* 1986; 4(2): 287-313.
10. Garnier J., Malinié G., Saillard Y., Cherfils-Clérouin C. Self-similar solutions for a nonlinear radiation diffusion equation. *Physics of Plasmas* 2006; 13: doi: 10.1063/1.2350167.
11. Krief M. Analytic solutions of the nonlinear radiation diffusion equation with an instantaneous point source in non-homogeneous media. *Physics of Fluids* 2021; 057105: doi: 10.1063/5.0050422.